

Combinatorial de Rham cohomology group and discrete Morse homology group

日本女子大学大学院 理学研究科 数理・物性構造科学専攻
理化学研究所 革新知能統合研究センター 数理科学チーム
岩下 沙絵子 (Saeko IWASHITA) *

概要

現代幾何学の基礎対象である滑らかな多様体に対し、その接空間上の多重線形交代形式として微分形式が定義される。微分形式のなす空間は豊富な代数構造を持ち、関わる諸定理は多様体の構造を調べるうえで重要な役割を果たすことが知られている。多様体の離散化の一つに単体複体があり、組み合わせ微分形式は単体複体上で定義される微分形式である。この概念は 2002 年に Forman により導入され、多様体上の微分形式が関わる諸定理の離散類似の構成が行われている。本研究もその流れに沿うものであり、組み合わせ微分形式から得られる de Rham コホモロジー群と、離散 Morse 関数から構成される離散 Morse ホモロジー群の関係について述べる。

1 導入

1.1 準備

本研究で扱う基礎対象は有限抽象単体複体である。有限抽象単体複体とは、高次元の多面体を貼り合わせて得られる図形である単体複体を抽象化した概念であり、次のように定義される。

定義 1.1 (有限抽象単体複体). V を有限集合, Σ を V の部分集合族とする。組 $K = (V, \Sigma)$ が以下の条件を満たすとき, K を有限抽象単体複体という。

- 任意の $v \in V$ に対し, 1 点集合 $\{v\}$ は Σ に属する。
- 空集合 \emptyset は Σ の元ではない。
- 任意の部分集合 $\sigma \in \Sigma$ に対し, σ の任意の空でない部分集合 $\rho \subset \sigma$ は Σ に属する。

K が有限抽象単体複体であるとき, 部分集合族 Σ の元 σ を単体という。単体 σ が $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ と表されるとき, σ は p 次元単体であるという。特に 0 次元単体を頂点という。単体 $\sigma, \rho \in \Sigma$ に対して包含関係 $\rho \subset \sigma$ が成立するとき, ρ を σ の面といい, $\rho \prec \sigma$ と表す。有限抽象単体複体 K の次元を, K に含まれる単体の次数の最大値で定める。

例 1.2. $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, \Sigma = 2^V \setminus \{\emptyset\}$ とすると, $K = (V, \Sigma)$ は 3 次元抽象単体複体である。 K

* E-mail: m2556001is@gr.jwu.ac.jp

は四面体として図示することができ、各頂点が 0 次元単体、各辺が 1 次元単体、各面が 2 次元単体、四面体の中身が 3 次元単体となっている (図 1)。

例 1.3. $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ とし、 Σ_1 を図 2 のようにとる。このとき $\{v_1, v_2, v_3, v_6\} \in \Sigma_1$ に対してその三点からなる部分集合が Σ_1 に含まれないため、 $K_1 = (V, \Sigma_1)$ は抽象単体複体ではない。一方 Σ_2 を図 3 のようにとると、 $K_2 = (V, \Sigma_2)$ は 2 次元抽象単体複体となる。このように、高次元の多面体の各面を三角形で分割した対象が単体複体である。

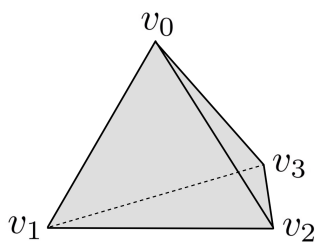


図 1 単体複体の例

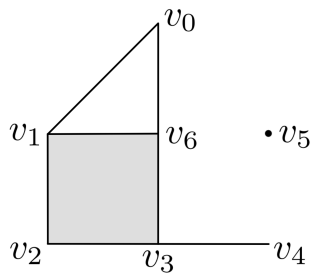


図 2 単体複体でない例

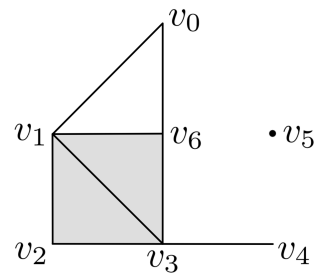


図 3 単体複体の例

次に有限抽象単体複体 K から得られるチェイン複体とホモロジー群について述べる。まず単体に向きを導入する。 K の p 次元単体 $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\} \in K$ に対し、置換 $s \in S_{p+1}$ による頂点の並び替え $s(\sigma) = \{v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\} \in K$ を考える。 σ と $s(\sigma)$ が偶置換で写り合うときに σ と $s(\sigma)$ は同じ向きであるといい、奇置換で写り合うときに σ と $s(\sigma)$ は逆の向きであるという。定義より一つの単体に対してその向きは二種類ある。向き付けられた単体を $\langle \sigma \rangle$ と表すこととし、 $\langle \sigma \rangle$ と $\langle \tilde{\sigma} \rangle$ が逆の向きであるときは $\langle \sigma \rangle = -\langle \tilde{\sigma} \rangle$ と表すこととする。

定義 1.4 (チェイン群). p を整数とする。有限抽象単体複体 K に対し、 K の p 次元単体に任意に向きを取る。 K の向き付けられた p 次元単体全体の集合により生成される自由 \mathbb{R} 加群を $C_p(K)$ と表し、 K の p 次チェイン群という。 $p < 0$ または $p > \dim K$ であるとき、 $C_p(K) = 0$ とする。チェイン群の直和 $\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p(K)$ を $C_*(K)$ と表すこととする。

定義 1.5 (境界作用素). チェイン群の次数を下げる写像 $\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ を、任意の p 単体 $\langle \sigma \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_p \rangle$ に対対応

$$\partial \langle \sigma \rangle = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0, \dots, v_{i-1}, \tilde{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$$

の線形拡張により定義する。ここで \tilde{v}_i は v_i を除くことを意味する。

補題 1.6. 線形写像 ∂ は境界作用素となる。すなわち、 $\partial \circ \partial = 0$ となる。

補題 1.6 より線形空間と境界作用素による系列 $(C_*(K), \partial)$

$$0 \rightarrow C_{\dim K}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial} C_p(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(K) \rightarrow 0$$

を得る。

定義 1.7 (ホモロジー群). 商線形空間 $\text{Ker}(\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)) / \text{Im}(\partial : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K))$ を K の p 次ホモロジー群といい, $H_p(K)$ と表す.

K の p 次チェイン群の双対空間 $C^p(K)$ と境界作用素 ∂ の双対写像 $\delta : C^p(K) \rightarrow C^{p+1}(K)$ から, 系列 $(C^*(K), \delta)$ を得て同様に商線形空間を考えることができる.

定義 1.8 (コホモロジー群). 商線形空間 $\text{Ker}(\delta : C^p(K) \rightarrow C^{p+1}(K)) / \text{Im}(\delta : C^{p-1}(K) \rightarrow C^p(K))$ を K の p 次コホモロジー群といい, $H^p(K)$ と表す.

また, K の p 次チェイン群 $C_p(K)$ に内積を導入する. K の p 次元単体 $\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle$ に対し, その内積 $\langle \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle \rangle \in \mathbb{R}$ を

$$\langle \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & (\langle \sigma \rangle = \langle \tau \rangle \text{ のとき}) \\ -1 & (\langle \sigma \rangle = -\langle \tau \rangle \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める. チェイン群の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : C_p(K) \times C_p(K) \rightarrow \mathbb{R}$ を単体の内積の線形拡張により定義する.

1.2 組み合わせ微分形式

以下 K を有限抽象単体複体, r を任意の非負整数とする. 本節では K 上の微分形式である組み合わせ微分形式を定義する. 組み合わせ微分形式は, Forman によって Novikov-Morse 理論の離散類似を構成するために導入された概念である. 組み合わせ微分形式は [1] において胞体複体に対し定義されるが, 本研究では計算の簡略化のため, また将来的なコンピュータでの応用を視野に入れ, 対象を胞体複体から単体複体に限定し考える.

定義 1.9 (組み合わせ微分形式 [1]). K のチェイン群の間の線形写像 $\omega : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ が以下の条件を満たすとき, ω を K 上の r 次組み合わせ微分形式という.

- ω は局所的である. すなわち, ω は入れた単体の面の一次結合を対応させる写像である.
- ω の次数は r である. すなわち, 任意の整数 p に対して $\omega(C_p(K)) \subset C_{p-r}(K)$ となる.

K 上の r 次組み合わせ微分形式全体の集合を $\Omega^r(K)$ と表すこととする.

例 1.10. 任意の有限抽象単体複体 K に対し, 境界作用素 ∂ は 1 次組み合わせ微分形式である. また, K の p 次元単体 $\langle \sigma \rangle$ とその面であるような $p-1$ 次元単体 $\langle \rho \rangle$ に対し, $e_{\langle \rho \rangle}^{\langle \sigma \rangle} : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ を

$$e_{\langle \rho \rangle}^{\langle \sigma \rangle}(\langle \tau \rangle) = \begin{cases} \langle \rho \rangle & (\langle \tau \rangle = \langle \sigma \rangle \text{ のとき}) \\ -\langle \rho \rangle & (\langle \tau \rangle = -\langle \sigma \rangle \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めると, $e_{\langle \rho \rangle}^{\langle \sigma \rangle}$ は r 次組み合わせ微分形式となる.

例 1.11. 例 1.2 における 3 次元抽象単体複体 K 上の 3 次組み合わせ微分形式全体の集合 $\Omega^3(K)$ を考えると,

$$\Omega^3(K) = \text{Span}\{e_{\langle v_0 \rangle}^{\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle}, e_{\langle v_1 \rangle}^{\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle}, e_{\langle v_2 \rangle}^{\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle}, e_{\langle v_3 \rangle}^{\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle}\}$$

となる．よって $\Omega^3(K)$ は 4 次元の線形空間である．同様に, $\Omega^2(K)$ は 18 次元の線形空間, $\Omega^1(K)$ は 28 次元の線形空間, $\Omega^0(K)$ は 15 次元の線形空間となることが確かめられる．

命題 1.12 (次元公理)．一点のみからなる 0 次元抽象単体複体 $\{v\}$ に対し, その組み合わせ de Rham コホモロジー群は

$$H^r(\Omega^*(\{v\})) = \begin{cases} \mathbb{R} & (r = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (r \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

定義 1.13 (外微分)． r 次組み合わせ微分形式 $\omega \in \Omega^r(K)$ に対し, その外微分 $d\omega \in \Omega^{r+1}(K)$ を

$$d\omega = \omega \circ \partial - (-1)^r \partial \circ \omega$$

により定める．

注意 1.14．上記の外微分 d の定義は, [1] に記載されている定義から符号を変更している．符号を変更しても得られる主要な結果は変わらないことが確かめられている．

補題 1.15 ([1])． d は余境界作用素となる．すなわち, $d \circ d = 0$ となる．

定義 1.16 (組み合わせ de Rham コホモロジー群)．組み合わせ微分形式によるコチェイン複体 $(\Omega^*(K), d)$ から得られるコホモロジー群 $H^r(\Omega^*(K))$ を K の r 次組み合わせ de Rham コホモロジー群という．

定理 1.17 (離散版 de Rham の定理 [1])． K の組み合わせ de Rham コホモロジー群 $H^r(\Omega^*(K))$ は K のコホモロジー群 $H^r(K)$ と同型である．

二つの滑らかな多様体 M, N とその間の滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ に対し, 微分形式の引き戻し写像 $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ を定義することができる．組み合わせ微分形式に対して, 以下のように離散類似を構成することができる．

定義 1.18 (単体写像)． $K = (V_K, \Sigma_K), L = (V_L, \Sigma_L)$ を有限抽象単体複体とする．このとき, 頂点間の写像 $f: V_K \rightarrow V_L$ であって, K の単体の頂点 v_0, v_1, \dots, v_p に対し $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p)$ が L の単体の頂点となるとき, f を単体写像という．

注意 1.19．上記の定義において, $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p) \in V_L$ が相異なる頂点である必要はない．単体写像 f に対し,

$$f_*(\langle v_0, v_1, \dots, v_p \rangle) = \begin{cases} \langle f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p) \rangle & (f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p) \text{ が相異なるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めることで, チェイン群の間の線形写像 $f_*: C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ を得る．この f_* を単体写像 f による誘導線形写像という．

単体写像 $f: K \rightarrow L$ と L 上の r 次組み合わせ微分形式 $\omega \in \Omega^r(L)$ に対し, 次のように K 上の r 次組み合わせ微分形式 $f^*(\omega) \in \Omega^r(K)$ を構成することができる.

$$\begin{array}{ccc}
 f^*: \Omega^r(L) & \longrightarrow & \Omega^r(K) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \omega & \longmapsto & f^*(\omega): C_*(K) \longrightarrow C_{*-r}(K) \\
 & & \downarrow f_* \quad \quad \quad \uparrow \tilde{f} \\
 & & f_*(C_*(K)) \xrightarrow{\omega|_{f_*(C_*(K))}} \omega(f_*(C_*(K))) \\
 & & \cap \quad \quad \quad \cap \\
 & & C_*(L) \xrightarrow{\omega} C_{*-r}(L)
 \end{array}$$

ただし, \tilde{f} は像 $\omega(f_*(C_*(K)))$ 上でのみ定義される誘導線形写像 f_* の疑似的な逆写像である.

定義 1.20 (引き戻し写像). 単体写像 $f: K \rightarrow L$ に対し, $f^*: \Omega^r(L) \rightarrow \Omega^r(K)$ を単体写像 f による組み合わせ微分形式の引き戻し写像という.

補題 1.21. 引き戻し写像に対し, 次が成立する.

- f^* はコチェイン写像である. すなわち, 外微分 d に対し $d \circ f^* = f^* \circ d$ となる.
- 恒等写像の引き戻し写像 $(\text{id}_K)^*$ は恒等写像 $\text{id}_{\Omega^r(K)}$ と一致する.
- 二つの単体写像 $f: K \rightarrow L, g: L \rightarrow S$ に対し, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ となる.

特に K が L の部分複体であるとき, つまり K が L の部分集合であって抽象単体複体の構造を持つとき, 単体写像として包含写像 $\iota: K \rightarrow L$ をとることができる. このとき, 対 (L, K) 上の r 次組み合わせ微分形式を

$$\Omega^r(L, K) = \text{Ker } \iota^*$$

により定める. 補題 1.21 より引き戻し写像 ι^* はコチェイン写像であるので, $(\Omega^*(L, K), d)$ は $(\Omega^*(L), d)$ の部分複体となる.

定義 1.22 (組み合わせ相対 de Rham コホモロジー群). 対 (L, K) 上の組み合わせ微分形式によるコチェイン複体 $(\Omega^*(L, K), d)$ から得られるコホモロジー群 $H^r(\Omega^*(L, K))$ を, r 次組み合わせ双対 de Rham コホモロジー群という.

命題 1.23 (完全性公理). 抽象単体複体 L とその部分複体 K に対し, 系列

$$0 \rightarrow \Omega^r(L, K) \rightarrow \Omega^r(L) \rightarrow \Omega^r(K) \rightarrow 0$$

は完全である. この短完全系列から組み合わせ de Rham コホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \rightarrow H^r(\Omega^*(L, K)) \rightarrow H^r(\Omega^*(L)) \rightarrow H^r(\Omega^*(K)) \rightarrow H^{r+1}(\Omega^*(L, K)) \rightarrow \cdots$$

を得る.

命題 1.24 (切除公理). 抽象単体複体 J とその部分複体 K, L に対し, 包含写像 $\iota: (K, K \cap L) \rightarrow (K \cup L, L)$ の引き戻し写像 ι^* により $H^r(\Omega^*(K \cup L, L))$ と $H^r(\Omega^*(K, K \cap L))$ は同型となる.

1.3 離散 Morse 関数

閉多様体に対して確立されている Morse 理論について, その諸定理の離散類似が抽象単体複体に対して構成されている. 本節ではその一部の紹介を行う.

定義 1.25 (離散 Morse 関数 [2]). 有限抽象単体複体 K 上の関数 $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ が離散 Morse 関数であるとは, 任意の p 次元単体 $\sigma \in K$ に対して以下が成立するときという.

- $\#\{\tau^{(p+1)} \in K \mid \tau \succ \sigma \text{ かつ } f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$
- $\#\{\rho^{(p-1)} \in K \mid \rho \prec \sigma \text{ かつ } f(\rho) \geq f(\sigma)\} \leq 1$

離散 Morse 関数 f に対し, 上記の二つの集合の濃度が 0 となるような単体 $\sigma \in K$ を臨界単体といい, その指数を単体の次元で定める. 臨界単体の f による像を臨界値という. 指数 p の臨界単体全体の集合により生成された自由 \mathbb{R} 加群を $\mathcal{M}_p^f(K)$ と表すこととする.

例 1.26. 任意の抽象単体複体 K に対し, 各単体の次元を割り当てる関数 $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\sigma) = \dim \sigma$ は離散 Morse 関数となる (図 4). このとき, K の任意の単体は臨界単体となる.

例 1.27. 2 次元抽象単体複体 K に対して図 5 のように関数 $f_1 : K \rightarrow \mathbb{R}$ を与える. このとき, 1 次元単体 $\{v_1, v_2\} \in K$ に対して

$$\#\{\rho^{(0)} \in K \mid \rho \prec \{v_1, v_2\} \text{ かつ } f_1(\rho) \geq f_1(\{v_1, v_2\})\} = \#\{\{v_1\}, \{v_2\}\} = 2 > 1$$

となるため, f_1 は離散 Morse 関数ではない. 図 6 のように関数 $f_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$ を与えると, f_2 は離散 Morse 関数となる. 臨界単体は $\{v_1\}, \{v_2, v_0\}, \{v_0, v_1, v_2\} \in K$ であり, その指数はそれぞれ 0, 1, 2 である.

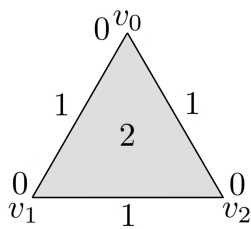


図 4 離散 Morse 関数の例

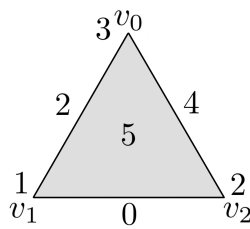


図 5 離散 Morse 関数でない例

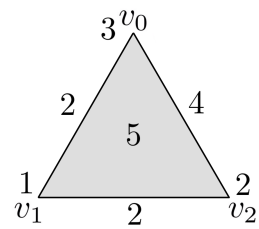


図 6 離散 Morse 関数の例

以下 f を K 上の離散 Morse 関数とする. f の勾配ベクトル場 V_f を次のように与える.

定義 1.28 (勾配ベクトル場 [2]). 任意の p 次元単体 $\langle \sigma \rangle \in K$ に対し, $V_f(\langle \sigma \rangle) \in C_{p+1}(K)$ を

$$V_f(\langle \sigma \rangle) = \begin{cases} -\langle \partial \langle \tau \rangle, \langle \sigma \rangle \rangle \langle \tau \rangle & (\tau \succ \sigma \text{ かつ } f(\tau) \leq f(\sigma) \text{ となる } \tau^{(p+1)} \in K \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める. この線形拡張により定まる $V_f : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(K)$ を離散 Morse 関数 f の勾配ベクトル

場という．勾配ベクトル場 V_f に付随する勾配流 $\Phi_f : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ を

$$\Phi_f = \text{id}_{C_p(K)} + \partial \circ V_f + V_f \circ \partial$$

と定める．

例 1.29. 離散 Morse 関数 f の勾配ベクトル場 V_f は、関数値が下がる方向を指し示す矢印として図示される．例 1.26 における離散 Morse 関数 f の勾配ベクトル場 V_f は零写像であり、零ベクトル場と捉えることができる．例 1.27 における離散 Morse 関数 f_2 の勾配ベクトル場 V_{f_2} は、図 7 のように図示できる．

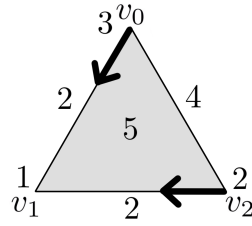


図 7 勾配ベクトル場の例

f の勾配流 Φ_f に対し、勾配流で不変なチェインの集合

$$C_p^{\Phi_f}(K) = \{c \in C_p(K) | \Phi_f c = c\}$$

を考えることができる．勾配流の定義より Φ_f はチェイン写像であるため、 $(C_*^{\Phi_f}(K), \partial)$ は $(C_*(K), \partial)$ の部分複体となる．これにより、ホモロジー群 $H_*(C_*^{\Phi_f}(K))$ を得る．

定理 1.30 ([2]). 勾配流 Φ_f により構成されるホモロジー群 $H_r(C_*^{\Phi_f}(K))$ とホモロジー群 $H_r(K)$ は同型となる．

更に次の定理より、臨界単体により生成される空間 $\mathcal{M}_*^f(K)$ のホモロジー群を考えることができる．

定理 1.31 ([2]). 勾配流によるチェイン群 $C_p^{\Phi_f}(K)$ と臨界単体により生成される自由加群 $\mathcal{M}_p^f(K)$ は同型となる．

系 1.32 ([2]). 臨界単体によるホモロジー群 $H_r(\mathcal{M}_*^f(K))$ はホモロジー群 $H_r(K)$ と同型である．

定義 1.33 (離散 Morse ホモロジー群). 臨界単体によるホモロジー群 $H_r(\mathcal{M}_*^f(K))$ を r 次離散 Morse ホモロジー群という．

2 これまでの結果

2.1 結果

定理 1.17 と系 1.32 を通して、組み合わせ微分形式による de Rham コホモロジー群 $H^*(\Omega^*(K))$ と離散 Morse 関数によるホモロジー群 $H_*(\mathcal{M}_*^f(K))$ の双対空間の間接的な同型を示すことができ

る. 一方, 滑らかな場合の離散類似として両者にペアリングによる具体的な対応付けを与えたい.

定義 2.1 (積分). 有限抽象単体複体 K 上の p 次組み合わせ微分形式 $\omega \in \Omega^p(K)$ に対し, K の p 次元単体 $\langle \sigma \rangle$ 上での ω の積分を

$$\int_{\langle \sigma \rangle} \omega = \sum_{\langle v \rangle^{(0)} \prec \langle \sigma \rangle} \langle \omega(\langle \sigma \rangle), \langle v \rangle \rangle$$

と定める.

定義 2.2. f を離散 Morse 関数とする. p 次組み合わせ微分形式の空間 $\Omega^p(K)$ と p 次チェイン群 $C_p(K)$ の間のペアリング $(\cdot, \cdot) : \Omega^p(K) \times C_p(K) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(\omega, \langle \sigma \rangle) = \int_{\langle \sigma \rangle} \omega$$

の線形拡張で定める.

命題 2.3. ペアリング $(\cdot, \cdot) : \Omega^*(K) \times C_*(K) \rightarrow \mathbb{R}$ について, 次が成立する. $p-1$ 次組み合わせ微分形式 ω と p 次元単体 $\langle \sigma \rangle$ に対し,

$$(d\omega, \langle \sigma \rangle) = (\omega, \partial \langle \sigma \rangle).$$

系 2.4 (離散版 Stokes の定理). K の最大次元の組み合わせ微分形式 ω に対し,

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

が成立する.

注意 2.5. 系 2.4 において, K 上での積分 \int_K を K の最大次元の単体の総和 $c = \sum_i \langle \sigma_i \rangle \in C_{\dim K}(K)$ 上での積分 \int_c で定めている. また ∂K 上での積分 $\int_{\partial K}$ は $\partial c \in C_{\dim K-1}(K)$ 上での積分 $\int_{\partial c}$ で定めている.

補題 2.6. ペアリング $(\cdot, \cdot) : \Omega^*(K) \times C_*(K) \rightarrow \mathbb{R}$ は組み合わせ de Rham コホモロジー群 $H^p(\Omega^*(K))$ とホモロジー群 $H_p(C_*(K))$ の間のペアリング $(\cdot, \cdot) : H^p(\Omega^*(K)) \times H_p(C_*(K)) \rightarrow \mathbb{R}$ を誘導する.

2.2 今後の課題

f を離散 Morse 関数とする. 定義 2.2 のペアリング $(\cdot, \cdot) : \Omega^*(K) \times C_*(K) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, f の臨界単体によるチェイン群 $\mathcal{M}_*^f(K)$ への制限

$$(\cdot, \cdot) : \Omega^*(K) \times \mathcal{M}_*^f(K) \rightarrow \mathbb{R}$$

を考える. 補題 2.6 より上記のペアリングをホモロジーレベルに落とすことができ,

$$(\cdot, \cdot) : H^*(\Omega^*(K)) \times H_*(\mathcal{M}_*^f(K)) \rightarrow \mathbb{R}$$

を得る. このペアリングが双対的なペアリングであること, つまり非退化であることを示したい. チェインレベルのペアリングは双対的にならないことが確かめられており, 現在はホモロジーレベルのペアリングの性質を確かめている.

ペアリングの双対性を示す方法として, 直接的な計算に加えて以下の手法も併せて検討している. 離散 Morse 関数 f の臨界値の集合は有限集合であり, $\{c_1, c_2, \dots, c_s\} \subset \mathbb{R}$ と表すことができる. ここで, c_1, c_2, \dots, c_s は添え字に応じて値が単調増加するように並べ替えたものとし, 重複がある場合は一つのみ残すこととする.

定義 2.7 (レベル部分複体). $i = 1, 2, \dots, s$ に対してレベル部分複体 K_{c_i} を,

$$K_{c_i} = \bigcup_{f(\sigma) \leq c_i} \bigcup_{\rho \leq \sigma} \rho$$

と定める.

このように定義されたレベル部分複体 K_{c_i} は K の部分複体となる. これにより, 離散 Morse 関数 f による K の部分複体の増大列

$$K_{c_1} \subset K_{c_2} \subset \dots \subset K_{c_s} \subset K$$

を得る.

例 2.8. 例 1.26 において, f の臨界値の集合は $\{0, 1, \dots, \dim K\}$ であり, 各レベル部分複体 K_i は i 切片と呼ばれる K から自然に定まる部分複体と一致する ($i = 0, 1, \dots, \dim K$). 例 1.27 において, f_2 の臨界値の集合は $\{1, 4, 5\}$ であり, レベル部分複体 K_1, K_4, K_5 は以下のように図示できる.

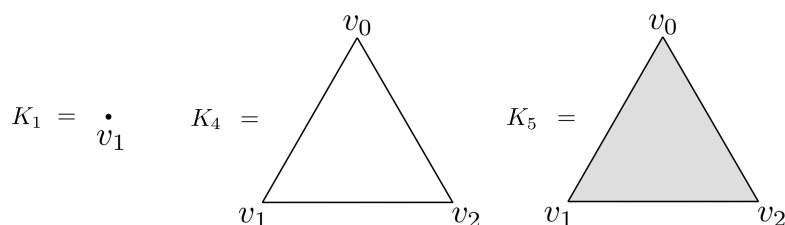


図 8 離散 Morse 関数によるフィルトレーション

これにより対 $(K_{c_i}, K_{c_{i-1}})$ 上での組み合わせ相対 de Rham コホモロジー群 $H^r(\Omega^*(K_{c_i}, K_{c_{i-1}}))$ を考えることができる ($i = 2, 3, \dots, s$). 現在はこの組み合わせ相対 de Rham コホモロジー群の性質を調べており, 十分な結果が得られればペアリングの双対性の証明への寄与が期待される.

参考文献

- [1] Robin Forman, *Combinatorial Novikov-Morse theory*, Internat. J. Math. 13 (2002), no. 4, pp. 333-368, DOI 10.1142/S0129167X02001265. MR1911862.
- [2] R. Forman, *Morse Theory for Cell Complexes*, Adv. Math. 134(1998), no. 1, 90-145, DOI 10.1006/aima.1997.1650. MR1612391.